Nova Série
BOLETIM
DA SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

Bol. Soc. Bras. Mat., Vol. 22, No. 1, 39-62

Déploiements non dicritiques des formes différentielles holomorphes $A\ dx + B\ dy$

Dominique Cerveau

Abstract. Some special unfoldings of Pfaffian forms are studied. Applications to forms with small multiplicity are purposed.

0. Introduction

On définit la notion de déploiement quasi-régulier et de déploiement de Morse pour les formes différentielles. Alors que toute fonction possède un déploiement de Morse, i.e. un déploiement tel que pour les valeurs génériques du paramètre les singularités soient de type Morse, il n'en est pas de même pour les formes différentielles; l'existence d'un tel déploiement implique celle d'un objet de type facteur intégrant généralisé.

Les déploiements quasi-réguliers sont les plus naturels, ceux qui, comme l'indique le vocable, ne présentent pas trop d'irrégularités (au sens de la théorie des équations différentielles linéaires). On construira des exemples de formes différentielles dont tous les déploiements quasi-réguliers sont triviaux. On terminera par l'étude des déploiements des formes différentielles à deux variables dont le 1-jet est dégénéré, i.e. du type ydy; c'est en fait cette étude qui a motivé l'introduction des notions ci-dessus.

Une partie de ce travail a été effectuée lors de séjours de l'auteur à l'Université de Valladolid et à l'IMPA de Rio. Je remercie ces deux institutions pour leur accueil.

1. Déploiements non Dicritiques et Déploiements Quasi-reguliers

On désigne par $\mathcal{O}_n$ l'anneau des germes de fonctions holomorphes à l'origine de

Received 10 December 1990.

$\mathbb{C}^n$ et par $\mathcal{M}_n \subset \mathcal{O}_n$ son idéal maximal; $\Lambda^1(\mathbb{C}^n, o)$ dénote le $\mathcal{O}_n$-module des germes de 1-formes holomorphes à l'origine de $\mathbb{C}^n$.

Soit $\omega_o = A_o dx + B_o dy \in \Lambda^1(\mathbb{C}^2, o)$ un germe de 1-forme dont le lieu singulier $S(\omega_o) = \{A_o = B_o = 0\}$ se réduit à 0, i.e. $\mu_o = \dim \mathcal{O}_2/(A_o, B_o) < \infty$.

Un *déploiement* à un paramètre de ω_o est la donnée d'un germe de 1-forme *intégrable* ω holomorphe à l'origine de $\mathbb{C}^3 = \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}$ tel que $\omega_o = i^*\omega$, où $i: \mathbb{C}^2, o \to \mathbb{C}^3, o$ désigne l'inclusion canonique. Deux déploiements ω et ω' de ω_o sont équivalents s'il existe un germe de difféomorphisme $\psi: \mathbb{C}^3, 0 \to C^3, 0$ du type $\psi(x, y, t) = (\Phi_t(x, y), \varphi(t))$, et une unité $U \in \mathcal{O}_3$ tels que $\omega' = U.\psi^*\omega$. On a évidemment les notions de déploiements à un nombre quelconque de paramètres, de déploiement versel (dont l'existence est annoncée par Nicolau-Mattéi, la base étant en général non lisse) mais nous n'en ferons pas usage ici. Un déploiement ω de ω_o est trivial s'il est équivalent au "déploiement constant ω_o", i.e. $\omega = U\psi^*\omega_o$ pour certains U et ψ comme ci-dessus. Mentionnons, et ceci nous sera utile, qu'un déploiement $\omega = Adx + Bdy + Cdt, A, B, C \in \mathcal{O}_3$ est trivial si et seulement si C appartient à l'idéal (A, B); en effet si $C = \alpha A + \beta B$ le champ de vecteur holomorphe $Z = \frac{\partial}{\partial t} - \alpha\frac{\partial}{\partial x} - \beta\frac{\partial}{\partial y}$ est annulé par ω. On constate que ω est trivial en redressant Z, ce qui peut être fait par un difféomorphisme du type $(\Phi_t(x, y), \varphi(t))$.

Dans le cas des fonctions on a la propriété suivante: si f_o est un élément de $\mathcal{O}_2$ à singularité isolée on peut trouver un déploiement $f \in \mathcal{O}_3$ de f_o tel que les singularités des $f_t = f(., t)$ soient, pour $t \neq 0$, toutes de type Morse et au nombre de $\mu_o = \dim \mathcal{O}_2/\left(\frac{\partial f_o}{\partial x}, \frac{\partial f_o}{\partial y}\right)$ (il faudrait bien sûr préciser cet énoncé en prenant des représentants de nos objets sur des voisinages convenables). Nous verrons qu'il existe des obstructions à établir des énoncés analogues dans le contexte de formes différentielles.

Soient $\omega = Adx + Bdy + Cdt$ un déploiement à un paramètre de ω_o, $S(\omega) = (A = B = C = 0)$ son lieu singulier et $\prod_\omega: X_\omega \to \mathbb{C}^3, S(\omega)$ la désingularisation de $\omega[C, C]$; soit $Y_\omega \subset S(\omega)$ le sous ensemble analytique des points m de $S(\omega)$ qui ont été éclatés (i.e. les points m tels que $\dim \prod_\omega^{-1}(m) \neq 0$). Une composante Y_i de $\prod_\omega^{-1}(Y_\omega)$ est dite dicritique si Y_i n'est pas feuille (singulière) du feuilletage éclaté strict $\prod_\omega^* \mathcal{F}_\omega$, $\mathcal{F}_\omega$ désignant le feuilletage singulier associé à ω. Enfin on dit que ω est *non dicritique* si aucune composante du diviseur exceptionnel $\prod_{\omega}^{-1}(Y_{\omega})$ est dicritique.

Par exemple si ω_o a une intégrale première holomorphe $f_o \in \mathcal{O}_2$ (i.e. $df_o \wedge \omega_o = 0$), alors tout déploiement ω de ω_o posséde une intégrale premiére $f \in \mathcal{O}_3$: c'est un résultat de [M, M]. Par suite tout déploiement d'un tel ω_o est non dicritique. Il en de même pour les formes ω_o de type logarithmique i.e. du type

$$\omega_o = f_1 \dots f_p \Sigma \lambda_i \frac{df_i}{f_i}, \quad f_i \in \mathcal{O}_2 \text{ et } \lambda_i \in \mathbb{C}, \mathbb{Z} \text{ indépendants.}$$

Par contre, tout déploiement d'une forme ω_o possédant une intégrale première méromorphe pure est dicritique.

On a le:

Théorème 1. ([C, C].) Soient ω_o un germe de 1-forme holomorphe à l'origine de $\mathbb{C}^2, (f_o = 0)$ une séparatrice de $\omega_o, f_o \in \mathcal{O}_2$ et ω un déploiement non dicritique de ω_o. Alors ω posséde une séparatrice $(f = 0), f \in \mathcal{O}_3$ étendant f_o (i.e. f_o est une composante de foi). De plus toute courbe intégrale $\gamma: \mathbb{C}, o \to \mathbb{C}^3, S(\omega)$ de ω (i.e. $\gamma^*\omega = 0$) est contenue dans une séparatrice de ω.

Rappelons les notions de singularités réduites et de courbes généralisées:

Définition. Soit $\omega_o \in \Lambda^1(\mathbb{C}^2, o)$ un germe de 1-forme holomorphe s'annulant à l'origine. On dit que ω_o est *réduite* si le 1-jet de ω_o est linéairement conjugué à l'un des suivants:

$^*\lambda_1 xdy - \lambda_2 xdy, \lambda_i \in \mathbb{C} - \{o\}, \lambda_1/\lambda_2 \notin \mathbb{Q}_+$ (= rationnels positifs)

$^{**}ydx$

Notons que si ω_o est réduite alors $\mu(\omega_o) = 1$ si et seulement si ω_o a son 1-jet de type *. On dira indifféremment que ω_o ou $\mathcal{F}_{\omega_o}$ est réduit.

Définition [C, L, S]. Soient $\omega_o \in \Lambda^1(\mathbb{C}^2, o)$ et $\prod_{\omega_o}: X_{\omega_o} \to \mathbb{C}^2, o$ la réduction de ω_o. On dit que ω est une *courbe généralisée* si:

1. ω_o est non dicritique, i.e. chaque branche du diviseur $\prod_{\omega_o}^{-1}(o)$ est une feuille (singuliére) du feuilletage éclaté scrict $\prod_{\omega_o}^* \mathcal{F}_{\omega_o}$.
2. Les singularités du feuilletage éclaté scrict $\prod_{\omega_o}^* \mathcal{F}_{\omega_o}$ sont de type * (i.e. possédent une équation locale réduite de type *).

Les propriétés qui suivent sont établies dans le travail [C, L, S] ou bien évidentes; si ω_o est une courbe généralisée alors ω_o posséde un nombre fini de séparatrices toutes holomorphes (au sens où toute séparatrice formelle de ω_o converge). Si f_o désigne une équation réduite de l'union de ces séparatrices, les invariants numériques de réduction de f_o et ω_o coïncident; notamment:

$$\mu(f_o) = \mu(df_o) = \mu(\omega_o) \quad (\ \mu = \text{nombre de Milnor})$$
$$\nu(f_o) - 1 = \nu(df_o) = \nu(\omega_o) \quad (\ \nu = \text{valuation d'ordre})$$

La propriété de *quasi-régularité* décrite ci-dessous généralise à la dimension 3 la notion de courbe généralisée (c'est possible de définir d'ailleurs cette notion en toute dimension mais nous n'en ferons pas usage). Soient donc $\omega \in \Lambda^1(\mathbb{C}^3, o)$ un germe de forme intégrable non dicritique et $\prod_\omega : X_\omega \to \mathbb{C}^3, S(\omega)$ la réduction de ω; on note $\tilde{S}$ le lieu singulier du feuilletage éclaté strict $\prod_\omega^* \mathcal{F}_\omega$, $\tilde{S} \subset \prod_\omega^{-1} S(\omega)$. Soient $m \in \tilde{S}_{lisse}$ et T_m une surface lisse transverse à $\tilde{S}$ en m; on dit que $\prod_\omega^* \mathcal{F}_\omega$ est singulier régulier en m si la restriction $i_{T_m}^* \prod_\omega^* \mathcal{F}_\omega$ de $\prod_\omega^* \mathcal{F}_\omega$ à T_m (qui est réduite) est une singularité de type $*$. On introduit la:

Définition. ω est *quasi-régulière* si:

1. ω est non dicritique
2. en chaque point de $\tilde{S}_{lisse}$ $\prod^* \mathcal{F}_\omega$ est singulier régulier.

Remarques.

1. La notion de quasi-régularité est donc une notion de non dégénérescence (après réduction) semblable au concept de point singulier régulier pour les équations linéaires. Bien que le choix de terminologie soit discutable nous le préférons à l'appellation "surface généralisée".
2. La propriété de quasi-régularité est une propriété des composantes $\tilde{S}_i$ de $\tilde{S}$ i.e. on a l'équivalence entre (i) et (ii)
   i) tout point de $\tilde{S}_i - \text{Sing}(\tilde{S})$ est quasi-régulier
   ii) il existe un point de $\tilde{S}_i$ quasi-régulier
3. Si ω quasi-régulière est représentée sur un voisinage $\mathcal{V}$ de O suffisamment petit alors pour tout $m \in S(\omega) \cap \mathcal{V}$ le germe ω, m est quasi-régulier.

Le résultat suivant décrit la structure des singularités des formes quasi-régulières.

Théorème 2. *Soit $\omega \in \Lambda^1(\mathbb{C}^3, o)$ intégrable non dicritique quasi-régulière. Alors ω possède un nombre fini de séparatrices toutes convergentes. Soit $F = 0$ une équation réduite de l'union de ces séparatrices. Les propriétés suivantes sont satisfaites, ω étant représentée sur un ouvert $\mathcal{V}$ suffisamment petit:*

1. *$S(\omega) = S(dF)$, i.e. les singularités de ω sont les points critiques de F; en particulier $S(\omega) \subset F^{-1}(o)$.*
2. *Soit $\hat{\gamma}$ une courbe intégrale formelle de ω passant par le point $m \in S(\omega) \cap \mathcal{V}$ alors $F o \hat{\gamma} = 0$.*
3. *Soit $m \in S(\omega) - \{o\} \cap \mathcal{V}$ et $i \colon \mathbb{C}^2, o \to \mathbb{C}^3, m$ une section plane générale; notons $\mu^T(\omega, m) = \mu(i^*\omega, m)$, nombre indépendant de i général. Si $\mu^T(\omega, m) = 1$ alors $(F^{-1}(o), m)$ est un croisement ordinaire à deux branches.*
4. *De même si $m \in S(\omega) \cap \mathcal{V}$ et $d\omega(m) \neq 0$, alors $(F^{-1}(o), m)$ est un croisement ordinaire à deux branches.*
5. *Soit $m \in S(\omega)$; si $(F^{-1}(o), m)$ est un croisement ordinaire à deux branches alors ω, m est conjuguée à une forme réduite à deux variables $a(u, v)du + b(u, v)dv$.*

Preuve. Le point 1 se déduit directement de [C, C]: la séparatrice $F^{-1}(o)$ provenant du recollement dans la réduction X_ω de ω des séparatrices locales non contenues dans le diviseur exceptionnel $\prod_\omega^{-1}(Y_\omega)$, on constate puisque ω est non dicritique que le lieu singulier $\tilde{S}$ de $\prod_\omega^*(\mathcal{F}_\omega)$ est constitué des croisements des différentes composantes du diviseur $\prod_\omega^{-1}(Y_\omega)$, des croisements de ces composantes avec les séparatrices locales et des croisements des séparatrices locales entre elles (en fait la définition stricte de désingularisation de [C, C] fait que ce dernier cas n'apparaît pas, quitte à rééclater). Comme visiblement $S(dF) \subset S(\omega)$ on a l'égalité $S(dF) = S(\omega)$.

Pour le point 2 on commence par remarquer que toute séparatrice locale formelle de $\prod_\omega^* \mathcal{F}_\omega$ en un point $m \in X_\omega$ est convergente: c'est une conséquence de la quasi-régularité. Si $\hat{\gamma}$ est comme dans 2, quitte à rééclater on peut supposer que le relevé $\hat{\tilde{\gamma}}$ de $\hat{\gamma}$ à X_ω passe par un point lisse m de S; en m, $\prod_\omega^* \mathcal{F}_\omega$ a deux séparatrices locales convergentes et deux seules (dont l'une au moins d'entre elles coïncide avec le diviseur $\prod_\omega^{-1}(Y_\omega)$) formant un croisement ordinaire à deux branches; en $m \prod_\omega^* \mathcal{F}_\omega$ a une structure produit ($\mathbb{C}\times$ un feuilletage réduit de $\mathbb{C}^2$) et l'étude des singularités réduites de type * montre que $\hat{\hat{\gamma}}$ est "contenu" dans l'une des séparatrices locales; par suite $Fo\hat{\gamma} = 0$.

Etablissons le point 3; visiblement $\omega_o = i^*\omega$ est une courbe généralisée sinon ω ne serait pas quasi-régulière. Par suite ω_o possède un nombre fini de séparatrices; soit $f_o = 0$ une équation réduite de l'union de ces séparatrices. Comme $1 = \mu(\omega_o) = \mu(f_o), f_o$ est de Morse et puisque m ne peut être isolé dans $S(\omega)$, alors $\omega_{,m}$ est un déploiement trivial de ω_o [C, M] (on identifie ici ω_o et $\omega_{|i(\mathbb{C}^2)}$). En résulte que les séparatrices Z, m de ω en m forment un croisement ordinaire à deux branches; d'après le point 2 on a l'inclusion des germes $Z, m \subset F^{-1}(o), m$. Cette inclusion est visiblement une égalité.

Le point 4 s'établit de façon identique; on remarque que si $d\omega(m) \neq 0$ on peut trouver des coordonées u, v telles que

$$\omega = a(u,v)du + b(u,v)dv.$$

Le 1-jet de ω ne peut être de rang 1 puisque ω est quasi-régulière, d'autre part ce 1-jet ne peut être équivalent a $(u+v)du - vdu$ toujours à cause de la quasi-régularité. Par suite $j^1\omega$ est diagonalisable de rang 2:

$$j^1\omega \simeq \lambda_1 udv - \lambda_2 vdu$$

On constate aisément que la situation $\lambda_1/\lambda_2 \in \mathbb{Q}_+$ conduit (après réduction) ou bien à un phénomène dicritique ou bien à une singularité de type **, cas exclus - Par conséquent ω est réduite de type * et ses séparatrices Z forment un croisement normal à deux branches. On conclut comme dans le point 3.

Terminons par le point 5; soit T une transversale générale en $m, \dim T = 2$, et $\omega_o = \omega_{|T}$. Dáprès le point 2 les seules séparatrices de ω_o sont $F^{-1}(o) \cap T$; en résulte, puisque $F^{-1}(o) \cap T$ est un croisement normal et que ω_o doit être une courbe généralisée, que $\mu(\omega_o) = 1$. Comme dans [C, M] (page 31) on constate que $\omega_{,m}$ est un déploiement trivial de ω_o. On montre que ω_o est réduite comme dans le point 4. □

2. Déploiements de Morse

On généralise aux formes différentielles la notion de déploiement de Morse bien connue pour les fonctions.

Définition. Soit $\omega_o \in \Lambda^1(\mathbb{C}^2, o)$; un déploiement $\omega \in \Lambda^1(\mathbb{C}^3, o)$ de ω_o est de Morse si:

i) ω est quasi-régulière

ii) l'union des séparatrices $F^{-1}(o)$ de ω a ses singularités à croisements ordinaires en dehors de o.

Exemples.

1. Si ω_o possède une intégrale première $f_o \in \mathcal{O}_2$ alors ω_o possède un déploiement de Morse.
2. De même si ω_o est de type logarithmique, i.e. possède une intégrale première $\Sigma\lambda_i Log f_i, f_i \in \mathcal{O}_2, \lambda_i$ complexes $\mathbb{Z}$ indépendants, alors ω_o possède un déploiement de Morse.

Remarques.

1. Soit ω un déploiement de Morse de ω_o; si $S(\omega) = \{o\}, \omega$ a une intégrale première holomorphe (Malgrange); sinon soit $S(\omega) = US_i(\omega)$ la décomposition en branches irréductibles de $S(\omega)$; alors ω est localement triviale le long de $S_i(\omega) - \{o\}$. Plus précisément, une fois pris des représentants sur un ouvert convenable, si T_i est une surface générale passant par $m_i \in S_i(\omega) - \{o\}$ alors $\omega_{|T_i}$ est réduite et si $m_i' \in S_i(\omega) - \{o\}$ alors le germe $\omega_{m_i'}$ est conjugué à $\omega_{|T_i}$ (structure produit).
2. Désignant toujours par ω un déploiement de ω_o, soit ω_t la restriction de ω à une section plane générale Δ_t passant par $(o, o, t), \Delta_t$ voisine de $\mathbb{C}^2 \times \{t\}$; si m_t est une singularité de ω_t alors ω_{t,m_t} présente une singularité réduite de type (*). Si $m_t \in S(\omega)$ cela résulte de la remarque 1 sinon on est en présence d'une singularité de contact; en un tel point ω possède une intégrale première submersive dont la restriction à Δ_t sera de Morse pour Δ_t générale.

Question. Une courbe généralisée ω_o possède-t-elle un déploiement de Morse? Au vu des exemples 1 et 2 on est tenté de dire oui. Comme nous allons le voir la réponse est non en général. Le point clé est le phénomène suivant:

Théorème 3. *Soit ω un déploiement de Morse; F une équation réduite des* *séparatrices de ω. Il existe une* 1*-forme holomorphe η vérifiant*

$$d\omega = \left(\frac{dF}{F} + \eta\right) \wedge \omega.$$

Remarque. η est fermée modulo ω (i.e. la restriction de η aux feuilles de $\mathcal{F}_\omega$ est fermée); lorsque η est exacte modulo ω, i.e.

$$\eta = dh + a.\omega, \qquad h \text{ et } a \text{ dans } \mathcal{O}_3$$

alors ω possède le facteur intégrant réduit $e^h.F$ et par suite une intégrale première de type $\Sigma\lambda_i \operatorname{Log} F_i$, i.e. ω est logarithmique. Un problème intéressant serait d'étudier la cohomologie relative des formes ω de type Morse. On trouvera des résultats en ce sens chez Malgrange [Ma] et l'auteur [C_2].

Démonstration. Elle repose sur un résultat ancien de H. Cartan [C] qui affirme que $H^1(\mathbb{C}^3 - \{o\}, \mathcal{O}) = 0$ (de même $H^1(B^3 - \{o\}, \mathcal{O}) = 0$ pour une boule B^3, ce que nous utiliserons en fait). On suppose donc nos objets représentés sur une boule B^3 suffisamment petite pour que le discours qui suit ait un sens. Soit $m \in B^3 - \{o\}$; si $m \notin F^{-1}(o)$ alors d'après le théorème 2 ω est non singulière en m. Par suite il existe α et β dans $\mathcal{O}(\mathbb{C}^3, m), \alpha$ unité tels que $\omega = \alpha d\beta$; on a:

$$d\omega = d\alpha \wedge d\beta = \frac{d\alpha}{\alpha} \wedge \omega = \left(\frac{dF}{F} + \eta_m\right) \wedge \omega$$

avec

$$\eta_m = \frac{d\alpha}{\alpha} - \frac{dF}{F}$$

Si $m \in F^{-1}(o)_{lisse}$, alors de nouveau $\omega(m) \neq 0$ et comme $F^{-1}(o)$ est séparatrice, il existe α et β deux unités en m telles que $\omega = \alpha d(F\beta)$; il vient:

$$d\omega = d\alpha \wedge d(\beta F) = \frac{d\alpha}{\alpha} \wedge \alpha d(\beta F) = \left(\frac{d\alpha}{\alpha} + \frac{d(\beta F)}{\beta F}\right) \wedge \omega = \left(\frac{dF}{F} + \eta_m\right) \wedge \omega$$

avec cette fois:

$$\eta_m = \frac{d\alpha}{\alpha} + \frac{d\beta}{\beta}$$

Enfin si $m \in B - \{o\}$ est un point critique de F on peut trouver des coordonnées locales (u, v, t) en m telles que:

$$\omega = H(u,v,t)(va(u,v)du + ub(u,v)dv) = H(u,v,t).\omega'$$
$$F = K(u,v,t).u.v, \quad H, K, a, B \text{ unités}$$

C'est possible puisque $\mathcal{F}_{\omega,m}$ a une structure produit. On a:

$$d\omega' = \left[b(u,v) - a(u,v) + u\frac{\partial b}{\partial u} - v\frac{\partial a}{\partial v}\right] du \wedge dv$$

Remarquons que:

$$\frac{duv}{uv} \wedge \omega' = (b(u,v) - a(u,v))du \wedge dv$$

Comme a et b sont des unités on peut trouver $\eta' \in \Lambda^1(\mathbb{C}^2, o)$ tel que:

$$\left(u\frac{\partial b}{\partial u} - v\frac{\partial a}{\partial v}\right) du \wedge dv = \eta' \wedge \omega'$$

On passe du couple (ω', uv) au couple (ω, F) par un calcul élémentaire:

$$\begin{aligned} d\omega &= Hd\omega' + dH \wedge \omega' \\ &= \left(\frac{duv}{uv} + \eta' + \frac{dH}{H}\right) \wedge \omega \\ &= \left(\frac{dF}{F} - \frac{dK}{K} + \eta' + \frac{dH}{H}\right) \wedge \omega \end{aligned}$$

On pose alors:

$$\eta_m = \eta' + \frac{dH}{H} - \frac{dK}{K}.$$

Finalement on peut trouver un bon recouvrement de $B^3 - \{o\}$ par des polydisques U_i munis de 1-formes $\eta_i \in \Lambda^1(U_i)$ vérifiant:

$$d\omega = \left(\frac{dF}{F} + \eta_i\right) \wedge \omega$$

Sur une intersection non triviale $U_i \cap U_j$ on a:

$$O = (\eta_i - \eta_j) \wedge \omega$$

et par suite il existe $h_{ij} \in \mathcal{O}(U_i \cap U_j)$ tels que:

$$\eta_i - \eta_j = h_{ij}.\omega$$

Les h_{ij} vérifient naturellement les conditions de cocycles:

$$h_{ij} + h_{jk} + h_{ki} = O$$

chaque fois que cela a un sens. Suivant H. Cartan on écrira:

$$h_{ij} = h_i - h_j$$

où les $h_i \in \mathcal{O}(U_i)$. Les 1-formes différentielles $\eta_i - h_i\omega$ satisfont encore

$$d\omega = \left(\frac{dF}{F} + \eta_i - h_i.\omega\right) \wedge \omega$$

et se recollent pour définir un élément $\eta \in \Lambda^1(B^3 - \{o\})$; cet η se prolonge par Hartogs en un élément de $\Lambda^1(B^3)$ qui satisfait à

$$d\omega = \left(\frac{dF}{F} + \eta\right) \wedge \omega$$

Le fait que η soit fermée modulo ω s'obtient par différentiation:

$$O = d.d\omega = d\eta \wedge \omega - \left(\frac{dF}{F} + \eta\right) \wedge d\omega = d\eta \wedge \omega. \qquad \square$$

Corollaire. *Soit $\omega_o \in \Lambda^1(\mathbb{C}^2, o)$ possèdant un déploiement de Morse; il existe η_o tel que*

$$d\omega_o = \left(\frac{df_o}{f_o} + \eta_o\right) \wedge \omega_o$$

(f_o désignant une équation réduite de l'union des séparatrices de ω_o).

3. Construction d'Exemples sans Déploiements de Morse

Nous allons maintenant construire une série d'exemples pour lesquels il n'existe pas de η_o comme ci-dessus; ces exemples ne possèderont donc pas de déploiement de Morse.

On se donne $d + 1$ droites concourantes à l'origine de C^2 et $f_{d+1} = 0$ une équation homogène réduite de l'ensemble D de ces $d+1$ droites. On note $\Lambda^1(D)$ le $\mathcal{O}_2$ module des 1-formes $\omega_o \in \Lambda^1(\mathbb{C}^2, o)$ ayant D comme séparatrices:

$$\Lambda^1(D) = \{\omega_o \in \Lambda^1(\mathbb{C}^2, o) \text{ tel qu'il existe } \delta \in \Lambda^2(\mathbb{C}^2, o) \text{ vérifiant } \omega_o \wedge df_{d+1} = f_{d+1}.\delta\}$$

Proposition. *Soit $\omega_o \in \Lambda^1(D)$; il existe g et $h \in \mathcal{O}_2$ uniques tels que $\omega_o = g df_{d+1} + h(ydx - xdy)$.*

Preuve. On a $\omega_o \wedge df_{d+1} = f_{\delta+1}\delta$ pour un certain δ; soit

$$R = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}$$

le champ radial; on a:

$$\omega_o(R).df_{d+1} - (d+1)f_{d+1}.\omega_o = f_{d+1}.i_R\delta$$

En remarquant que $\omega_o(R)$ est divisible par f_{d+1} on obtient le résultat. □

Remarque. Si ω_o est une courbe généralisée ayant *précisément* D comme séparatrice alors $\nu(\omega_o) = d$; en résulte que, avec les notations de la proposition, g est une unité (sinon ω_o serait dicritique) et $\nu(h) \geq d-1$; comme dans toutes ces histoires on identifie deux formes différant d'une unité multiplicative on supposera $g \equiv 1$. Notons qu'un élément de type $df_{d+1} + h(ydx - xdy)$ est, pour h général tel que $\nu(h) \geq d-1$, une courbe généralisée ayant précisément D comme séparatrices.

On note $\Lambda_o^1(D)$ l'espace affine:

$$\Lambda_o^1(D) = \{df_{d+1} + h(ydx - xdy), h \in \mathcal{O}_2, \nu(h) \geq d-1\}$$

Lemme. *Soit $\omega_o = df_{d+1} + h(ydx - xdy)$ un élément de $\Lambda_o^1(D)$; sont équivalents:*

1. *il existe $\eta_o \in \Lambda^1(\mathbb{C}^2, o)$ tel que*

$$d\omega_o = \left(\frac{df_{d+1}}{f_{d+1}} + \eta_o\right) \wedge \omega_o$$

2. *$(d-1)h - R(h)$ appartient à l'idéal $I(\omega_o)$ des composantes de ω_o.*

Preuve. On a:

$$d\omega_o = (-2h - R(h))dx \wedge dy$$

et

$$\frac{df_{d+1}}{f_{d+1}} \wedge \omega_o = -(d+1)hdx \wedge dy$$

En résulte que $1 \Leftrightarrow 2$. □

Considérons le développement de h en polynômes homogènes:

$$h = h_{d-1} + h_d + \cdots$$

Si $(d-1)h - R(h)$ appartient à l'idéal $I(\omega_o)$ on aura:

$$(d-1)h - R(h) = \alpha\left(\frac{\partial f_{d+1}}{\partial x} + yh\right) + \beta\left(\frac{\partial f_{d+1}}{\partial y} - xh\right), \alpha, \beta \in \mathcal{O}_2.$$

Posant $\alpha = \alpha_o + \alpha_1 + \cdots, \beta = \beta_o + \beta_1 + \cdots \alpha_i, \beta_i$ homogènes de degré i il vient:

$$-h_d = \alpha_o \left(\frac{\partial f_{d+1}}{\partial x} + y h_{d-1} \right) + \beta_o \left(\frac{\partial f_{d+1}}{\partial y} - x h_{d-1} \right) \qquad (^{**})$$

Comme l'espace vectoriel des polynômes de degré i est strictement plus grand que 2 pour $i \geq 2$, on en déduit que pour $d+1 \geq 3$ et h général, $h = h_{d-1} + h_d + \cdots$ ne satisfera pas de formule de type $(^{**})$; on obtient comme conséquence le:

Théorème 4. *Génériquement un élément $\omega_o \in \Lambda^1(\mathbb{C}^2, o)$ d'ordre au moins 2 ne possède pas de déploiement de Morse.*

Considérons une courbe généralisée ω_o d'ordre précisément 2 et soit ω un déploiement quasi-régulier de ω_o; génériquement ω_o possède trois séparatrices lisses deux à deux transverses, que l'on peut normaliser à $x^3 + y^3 = 0; \omega$ possède alors une séparatrice $(F = 0), F$ déployant $x^3 + y^3$. Comme ce déploiement se factorise dans le déploiement universel

$$x^3 + y^3 + u_o + u_1 x + u_2 y + u_3 xy$$

on constate que ou bien:

1. $(F = 0)$ est trivial
2. $(F = 0)$ est à singularité isolée
3. $(F = 0)$ est à croisement ordinaire en dehors de 0.

Il n'est pas difficile de montrer que dans le cas 1 alors ω est elle même triviale i.e. conjuguée à ω_o. Dans le cas 2, d'après le théorème 2 et [Ma], ω a une intégrale première holomorphe et donc ω_o aussi et dans le cas 3, ω est de Morse. On en déduit le:

Théorème 5. *La propriété suivante est générique pour les éléments $\omega_o \in \Lambda^1(\mathbb{C}^2, o)$ d'ordre au moins 2: tout déploiement quasi-régulier ω de ω_o est trivial.*

4. Calculs de Déploiements

Nous présentons des calculs explicites de déploiements pour des formes ω_o de petite multiplicité. Pour bien situer notre propos nous rappelons au passage des résultats bien connus: phénomène de Kupka etc. Notre but est de décrire les déploiements à un paramètre des formes ω_o dont le 1-jet est non nul.

1. *Phénomène de Kupka-Reeb*: si $\omega_o \in \Lambda^1(\mathbb{C}^2, o)$ vérifie $d\omega_o(o) \neq 0$, alors tout déploiement ω de ω_o est trivial; en effet comme $(d\omega)^2 = 0$ le théorème de Darboux assure l'existence de coordonnées x et y telles que $d\omega = dx \wedge dy$; on conclut aisément en utilisant l'intégrabilité de ω.

2. *Cas* $d\omega_o(o) = 0$ *et* $j^1\omega_o \neq 0$. Dans ce cas $j^1\omega_o$ est la différentielle d'une forme quadratique que l'on peut supposer égale à xy ou y^2 dans un bon système de coordonnées. Etudions le cas $j^1\omega_o = d(xy)[C, M]$; soit ω déploiement de ω_o, à un paramètre pour simplifier:

$$\omega = (y + \cdots)dx + (x + \cdots)dy + (\cdots)dt = Adx + Bdy + Cdt$$

Remarquons que $(A = B = 0)$ est une courbe lisse Γ d'idéal de définition (A, B); de sorte que si C s'annule sur Γ alors $C \in (A, B)$ et ω est triviale. Si ce n'est pas le cas, ω est à singularité isolée et suivant Malgrange [Ma], ω possède une intégrale première f; ce qui contraint, par restriction, ω_o à en posséder une aussi. On retient donc l'alternative suivante lorsque $j^1\omega_o = d(xy)$

- ou bien ω_o n'a pas d'intégrale première et tout déploiement de ω_o est trivial
- ou bien ω_o a une intégrale première f_o que l'on peut choisir de Morse, et le feuilletage donné par les niveaux de $f_o(x, y) + t$ en est le déploiement universel.

Reste le cas où $j^1\omega_o = dy^2$ et là c'est une toute autre histoire. Nous allons nous contenter de décrire les déploiements des formes dites non dégénérées transverses.

3. *Formes "non dégénérées transverses"* [Ce,Mo], [Mo]: On considère l'ensemble $\Sigma^1 \subset \Lambda^1(\mathbb{C}^2, o)$ constitué des formes ω_o ayant dy^2 pour 1-jet. Développons un tel élément en composantes homogènes:

$$\omega_o = dy^2 + \delta_2 + \delta_3 + \ldots$$

$\delta_i \in \Lambda^1_i(\mathbb{C}^2)$ espace des 1-formes différentielles homogènes de degré i à deux variables. Notons $\prod_i: \Sigma^1 \to \Lambda^1_i(\mathbb{C}^2)$ la projection naturelle: $\prod_i(\omega_o) = \delta_i$.

Il existe un ouvert de Zariski $\overset{\circ}{\Lambda}{}^1_2(\mathbb{C}^2) \subset \Lambda^1_2(\mathbb{C}^2)$ tel que tout élément

$$\omega_o \in \prod{}_2^{-1}(\overset{\circ}{\Lambda}{}^1_2(\mathbb{C}^2)) = \Sigma^{10}$$

vérifie:

i) ω_o est une courbe généralisée

ii) ω_o a pour unique séparatrice un cusp ordinaire (i.e. une courbe difféomorphe à $y^2 + x^3 = 0$).

Les éléments de Σ^{10} sont dits *non dégénérés transverses.*

Considérons une forme ω_o ayant le cusp $y^2 + x^3 = 0$ comme séparatrice. Dápres [Ce,Mo] il existe f et h dans $\mathcal{O}_2$ tels que:

$$\omega_o = f.d(y^2 + x^3) + h(2xdy - 3ydx)$$

Si de plus ω_o est dans Σ^{10} alors f est visiblement une unité si bien que l'étude des éléments de Σ^{10} se ramène à celle des formes du type $\Omega_h = d(y^2 + x^3) + h(2xdy - 3ydx)$; plus précisément *tout élément de* Σ^{10} est *conjugué* à un *certain* Ω_h où $h \in \mathcal{M}_2$. On note $\Sigma_N^{10} = \{d(y^2 + x^3) + h(2xdy - 3ydx), h \in \mathcal{M}_2\}$ les écritures "normalisées" des éléments de Σ^{10}.

Définition. Un élément $\alpha \in \Lambda^1(\mathbb{C}^2, o)$ a la propriété de division relative par rapport à $f \in \mathcal{M}_2$ si et seulement si il existe $a \in \mathcal{O}_2$ et $\beta \in \Lambda^1(\mathbb{C}^2, o)$ tels que:

$$\alpha = adf + f.\beta$$

Si tel est le cas $(f = o)$ est séparatrice de α, mais l'inverse est faux; précisons dans le cas où $f(x, y) = y^2 + x^3$:

Proposition 6. ([C,L].) Ω_h a la propriété de division relative par rapport au cusp $y^2 + x^3 = 0$ si et seulement si h appartient à l'idéal Jacobien $J(y^2 + x^3) = (y, x^2)$ de $y^2 + x^3$.

Traitons très succintement l'étude des déploiements quasi-réguliers des formes non dégénérées transverses.

Proposition 7. *Soit ω un déploiement quasi-régulier de $\omega_o \in \Sigma^{10}$. Si ω_0 n'a pas d'intégrale première holomorphe alors ou bien ω est trivial ou bien ω est de Morse.*

Remarque. Lorsque ω_o a une intégrale première holomorphe f_o (f_o pourra être prise équivalente à $y^2 + x^3$), alors ω possède une intégrale première f déploiement de f_o et la classification des déploiements est facile: elle se ramène à la classification (source et but) des déploiements de f_o.

Preuve de la proposition 7. Si ω déploie ω_o de façon non dicritique, ω possède une séparatrice $(F = 0)$ déploiement de $y^2 + x^3 = 0$: $F(x, y, t) = y^2 + x^3 + t(\ldots)$; notamment F est irréductible dans $\mathcal{O}_3$. Comme le déploiement universel de $y^2 + x^3-$ soit $u_1 + u_2 x + y^2 + x^3-$ peut être vu dans les cubiques planes on vérifie facilement que ou bien

i) $(F = 0)$ est trivial, i.e. équivalent à $y^2 + x^3 = 0$ dans $\mathbb{C}^3$

ii) $(F = 0)$ est à singularité isolée

iii) $(F = 0)$ est à croisement ordinaire en dehors de O.

Dans le cas i) on peut trouver un système de coordonnées noté encore (x, y, t) tel que $F(x, y, t) = y^2 + x^3$; par suite à unité multiplicative près on a:

$$\begin{aligned} w &= d(y^2 + x^3) + H.(2xdy - 3ydx) + Cdt = \\ &= Adx + Bdy + Cdt, \quad A, B, C, H \in \mathcal{O}_3 \end{aligned}$$

Comme $y^2 + x^3 = 0$ est séparatrice de $\omega, \omega \wedge d(y^2 + x^3)$ est divisible par $y^2 + x^3$; ce qui implique que C est divisible par $y^2 + x^3$:

$$C = (y^2 + x^3)C', \quad C' \in \mathcal{O}_3.$$

Comme

$$A = 3x^2 - 3y.H, B = 2y + 2x.H,$$

on a

$$2xA + 3yB = 6(y^2 + x^3).$$

En résulte que $C \in (A, B)$ et le déploiement ω est donc trivial.

Dans le cas ii) $(F = 0)$ étant à singularité isolée, d'après le théorème 2, $S(\omega) = 0$.

Puisque ω est à singularité isolée, ω possède une intégrale première holomorphe [Ma] et donc ω_o aussi.

Enfin si $F^{-1}(o)$ est à croisement ordinaire en dehors de o, ω est par définition de Morse. □

On en déduit la:

Proposition 8. *Soit ω_o non dégénérée transverse d'écriture normalisée*

$$\Omega_h = d(y^2 + x^3) + h(2xdy - 3ydx).$$

Si $h \notin J(y^2+x^3)=(y,x^2)$ tout déploiement quasi-régulier de ω_o est trivial; il existe donc un ouvert de Zariski $\Sigma^{100} \subset \Sigma^{10}$ tel que tout élément de Σ^{100} ait ses déploiements quasi-réguliers triviaux.

Preuve. Soit ω un déploiement quasi-régulier de $\omega_o, (F=0)$ sa séparatrice. Si $F=0$ est à singularité isolée ou à croisements ordinaires en dehors de 0, il existe η_o (coroll. du th. 3) tel que:

$$d\omega_o = \left(\frac{dy^2+x^3}{y^2+x^3}+\eta_o\right)\wedge\omega_o, \quad \eta_o \in \Lambda^1(\mathbb{C}^2,o)$$

On obtient explicitement:

$$\left(2x\frac{\partial h}{\partial x}+3y\frac{\partial h}{\partial y}+5h\right)dx\wedge dy = 6h dx\wedge dy + \eta_o \wedge (d(y^2+x^3)+ \\ + h(2xdy-3ydx))$$

Par suite il existe $\alpha \in \mathcal{M}_2$ tel que:

$$2x\frac{\partial h}{\partial x}+3y\frac{\partial h}{\partial y}-h(1+\alpha)\in(y,x^2)$$

Ceci impose une condition sur le 1-jet $\gamma x+\epsilon y$ de h; précisément $\gamma=0$ mais on a l'équivalence:

$$\gamma=0 \Leftrightarrow h\in(y,x^2)=J(y^2+x^3).$$

En résulte que si $h\notin J(y^2+x^3)$ alors $(F=0)$ est trivial et donc ω aussi. □

En fait nous allons améliorer le résultat précédent en supprimant l'hypothèse de quasi-régularité:

Théorème 9. *Soit ω_o un élément de Σ^{100}; tout déploiement non dicritique de ω_o est trivial.*

On rappelle que $\omega_o \in \Sigma^{100}$ si et seulement si $h\notin J(y^2+x^3)$ où

$$\Omega_h = d(y^2+x^3)+h(2xdy-3ydx)$$

est l'écriture normalisée de ω_o; désignons par $J(\omega_o)$ l'idéal des composantes de $\omega_o = A_o dx + B_o dy, J(\omega_o)=(A_o,B_o)$ et $dJ(\omega_o)$ l'idéal engendré par

$$\left(\frac{\partial B_o}{\partial x}-\frac{\partial A_o}{\partial y}, A_o, B_o\right).$$

Les idéaux $J(\omega_o)$ et $dJ(\omega_o)$ sont intrinsèques: ils ne dépendent pas du choix des coordonnées et ne dépendent en fait que du feuilletage $\mathcal{F}_{\omega_o}$. On a l'équivalence pour $\omega_o \in \Sigma^{10}$:

$$\omega_o \in \Sigma^{100} \Leftrightarrow dJ(\omega_o) \not\subset J(\omega_o)$$

Preuve du théorème 9. Soit ω un déploiement non dicritique de ω_o que l'on suppose normalisée: $\omega_o = \Omega_h; \omega$ possède une séparatrice $(F = 0)$ déployant $y^2 + x^3 = 0$. Un certain nombre d'arguments utilisés précédemment persistent. Notamment:

i) si $(F = 0)$ est à singularité isolée alors ω possèdera une intégrale première holomorphe; par conséquent ω_o aussi et l'on aura $h \in J(y^2 + x^3)$.

ii) si $(F = 0)$ est trivial il en est de même pour ω.

iii) si $(F = 0)$ n'est ni trivial ni à singularité isolée, alors les singularités de $(F = 0)$ sont, en dehors de l'origine, des croisements ordinaires.

Comme le cas i) est exclus sous les hypothèses du théorème, il nous suffit donc d'établir que le cas iii) ne se présente pas. Considérons un déploiment F de $y^2 + x^3$ comme ci-dessus (iii); on peut à changement de coordonnées près écrire F sous la forme:

$$F(x, y, t) = u_1(t) + u_2(t)x + y^2 + x^3$$

Comme à t fixé $F(x, y, t) = 0$ est un morceau de cubique et que F doit être irréductible (puisque $y^2 + x^3$ l'est) la courbe $F(x, y, t) = 0$ dans $\mathbb{C}^2 \times \{t\}$ ne peut avoir qu'une seule singularité. Par suite ces singularités constituent une courbe lisse Γ; comme nécessairement Γ est dans le plan $y = 0$, il existe un changement de coordonnées σ:

$$\sigma: (x, y, t) \to (x + v_1(t), y, t)$$

tel que $d(Fo\sigma)$ s'annule précisément le long de l'axe des t; comme

$$\begin{aligned} Fo\sigma(x, y, t) = u_1(t) + u_2(t)v_1(t) + (v_1(t))^3 + x(u_2(t) + 3(v_1(t))^2 \\ + 3v_1(t)x^2 + y^2 + x^3 \end{aligned}$$

doit être singulier le long de l'axe des t on a:

$$Fo\sigma(x, y, t) = 3v_1(t).x^2 + y^2 + x^3$$

Si $v_1(t) \equiv 0$ on est dans le cas trivial (ii); sinon on choisit la coordonnée t de sorte que $v_1(t) = t^p/3$. Dans la suite on suppose donc que $F = F_p$ avec:

$$F_p(x, y, t) = t^p x^2 + y^2 + x^3$$

On remarque que F_p est quasi-homogène puisque:

$$F_p(\epsilon^{2p}x, \epsilon^{3p}y, \epsilon^2 t) = \epsilon^{6p}F(x,y,t)$$

Suivant un argument déjà utilisé dans [C,L] on introduit le feuilletage dont les feuilles sont le niveaux de la fonction rationnelle:

$$H_p(x,y,t) = \frac{x^2(t^p+x)}{y^2}$$

On note que $(H_p = -1)$ coïncide avec $(F_p = 0)$. Ce feuilletage se laisse définir par l'équation de Pfaff $\bar{\omega}_p = 0$ où:

$$\bar{\omega}_p = xy(t^p+x)\left(\frac{2.dx}{x} + \frac{d(t^p+x)}{t^p+x} - \frac{2dy}{y}\right)$$

On vérifie que:

$$d\bar{\omega}_p = (-7x - 4t^p)dx \wedge dy + pyt^{p-1}\ .dt \wedge dx + 3pxt^{p-1}.dy \wedge dt$$

et par suite le long de l'axe des t (qui est singulier pour $\bar{\omega}_p$) on a:

$$d\bar{\omega}_p(o,o,t) = -4t^p dx \wedge dy$$

Lídée du lemme qui suit est déjà exploitée dans [C,L]:

Lemme. *Soit $(G = 0)$ une hypersurface de $(\mathbb{C}^3, o), G$ réduite, ayant ses singularités en dehors de O de type croisement ordinaire. Soit $\alpha \in \Lambda^1(\mathbb{C}^3, o)$ ayant $(G = 0)$ comme séparatrice (i.e. $\alpha \wedge dG = G.\eta$, $\eta \in \Lambda^2(\mathbb{C}^3, o)$. Si $d\alpha$ s'annule le long des singularités de G alors α a la propriété de division relative, i.e.:*

$$\alpha = a.dG + G.\alpha_1, \quad a \in \mathcal{O}_3, \alpha_1 \in \Lambda^1(\mathbb{C}^3, o).$$

Preuve. Une fois encore on utilise la nullité de $H^1(B^3 - \{o\}, \mathcal{O})$. On représente nos objets sur une boule B suffisamment petite. Si en un point $m \in B - \{o\}$ on a $G(m) \neq 0$ ou $dG(m) \neq 0$, on peut trouver a_m et $\alpha_{1,m}$ tels que:

$$\alpha_{,m} = a_m dG + G.\alpha_{1,m}, \quad a_m \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^3, m), \alpha_{1,m} \in \Lambda^1(\mathbb{C}^3, m)$$

Soit $m \neq 0$ un point singulier de G; localement il existe des coordonnées x, y, t en m telles que $G = xy$. Comme $G = 0$ est séparatrice de α on peut écrire:

$$\alpha = yAdx + xBdy + xyCdt \quad \text{où} \quad A, B, C \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^3, m)$$

Comme $d\alpha(o,o,t) \equiv 0$ on a:

$$B(o,o,t) - A(o,o,t) \equiv 0$$

et $B - A = xA' + yB'$, $\quad A', B' \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^3, m)$. Il vient alors:

$$\alpha = (A + xA')d(xy) + xy(Cdt + B'dy - A'dx)$$

et l'on trouve encore $a_{,m}$ et $\alpha_{1,m}$ tels que:

$$\alpha = a_{,m}\, dG + G.\alpha_{1,m}$$

On peut donc recouvrir $B - \{o\}$ par des polydisques U_i munis de $a_i \in \mathcal{O}(U_i)$ et $\alpha_{1,i} \in \Lambda^1(U_i)$ tels que:

$$\alpha_{|U_i} = a_i.dG + G.\alpha_{1,i}$$

Sur les intersections non triviales $U_i \cap U_i$ on a:

$$0 = (a_i - a_j).dG + G.(\alpha_{1,i} - \alpha_{1,j})$$

Par suite:

$$(\alpha_{1,i} - \alpha_{1,j}) \wedge dG = 0$$

et comme dG s'annule en codimension deux, il existe $h_{i,j} \in \mathcal{O}(U_i \cap U_j)$ tels que:

$$(\alpha_{1,i} - \alpha_{1,j}) = h_{i,j}.dG$$

Visiblement les $h_{i,j}$ satisfont, chaque fois que cela a un sens:

$$h_{i,j} + h_{j,k} + h_{k,i} = 0$$

En résulte l'existence de $h_i \in \mathcal{O}(U_i)$ tels que $h_{i,j} = h_i - h_j$; les 1-formes $\alpha_{1,i} - h_i dG$ se recollent pour définir un élément de $\Lambda^1(B - \{o\})$ qui s'étend par Hartogs en $\alpha_1 \in \Lambda^1(B)$. De même on construit $a \in \mathcal{O}(B)$ en posant $a_{|U_i} = a_i + h_i.G$; on vérifie que:

$$\alpha = adG + G.\alpha_1$$

D'où le lemme. □

Remarques.

1. Le lemme se laisse généraliser sans peine à $\mathbb{C}^n$.
2. La forme $\bar{\omega}_p$ ne se laisse pas diviser relativement par H_p; en fait le lemme est une équivalence puisque les expressions $d\alpha = d(a.dG + G.\alpha_1)$ s'annulent évidemment sur les singularités de G.

Revenons à la démonstration du th. 9. On évalue $d\omega$ sur l'axe des t; nécessairement:

$$d\omega(o,o,t) = \lambda(t)dx \wedge dy$$

où λ est holomorphe en t.

1er cas: $\nu(\lambda(t)) \geq p$. On peut alors trouver $u(t) \in \mathbb{C}\{t\}$ tel que $d\omega(o,o,t) - u(t).d\bar{\omega}_p(o,o,t) = 0$. Visiblement la forme différentielle $\omega - u(t)\bar{\omega}_p$ a $(F_p = 0)$ pour séparatrice et sa différentielle s'annule sur les singularités de $(F_p = 0)$; on est exactement dans la situation du lemme et

$$\omega - u(t)\bar{\omega}_p = adF_p + F_p.\alpha, \quad \text{où} \quad a \in \mathcal{O}_3 \quad \text{et} \quad \alpha \in \Lambda^1(\mathbb{C}^3, o)$$

Si $\nu(u) \geq 1$ on obtient, avec des notations évidentes, en faisant $t = 0$:

$$\omega_o = a_o.d(y^2 + x^3) + (y^2 + x^3).\alpha_o = d(y^2 + x^3) + h(2xdy - 3ydx)$$

En résulte (prop. 6) que $h \in J(y^2 + x^3)$ ce qui est absurde si $\omega_o \in \Sigma^{100}$. Si $\nu(u) = 0$ i.e. $u(o) \neq 0$, on utilise la quasi homogénéité de F_p et $\bar{\omega}_p$; si σ_ϵ désigne l'application définie par:

$$\sigma_\epsilon(x,y,t) = (\epsilon^{2p}x, \epsilon^{3p}y, \epsilon^2 t)$$

on a:

$$F_p(\sigma_\epsilon) = \epsilon^{6p}.F_p$$

et

$$\sigma_\epsilon^*\bar{\omega}_p = \epsilon^{7p}.\bar{\omega}_p$$

Il vient:

$$\sigma_\epsilon^*\omega = a(\sigma_\epsilon)\epsilon^{6p}dF_p + \epsilon^{6p}.F_p\sigma_\epsilon^*(\alpha) + u(\epsilon^2 t)\epsilon^{7p}\bar{\omega}_p$$

Comme nécessairement $\sigma_\epsilon^*\alpha$ est divisible par ϵ^2 (car $p \geq 1$) on a:

$$\sigma_\epsilon^*\omega = \epsilon^{6p}\{a(\sigma_\epsilon).dF_p + \epsilon.u(\epsilon^2 t)\bar{\omega}_p + \epsilon^2(\cdots)\}$$

et le développement de $\sigma_\epsilon^*\omega$ suivant les puissances de ϵ est:

$$\sigma_\epsilon^*\omega = \epsilon^{6p}\{a(o).dF_p + \epsilon u(o)\bar{\omega}_p + \epsilon^2(\cdots)\}.$$

La forme $\sigma_\epsilon^*\omega$ est intégrable pour tout ϵ, par conséquent $a(o)dF_p + \epsilon u(o).\bar{\omega}_p$ est intégrable mod ϵ^2 i.e.:

$$a(o).u(o).dF_p \wedge \bar{\omega}_p = 0$$

or $dF_p \wedge \bar{\omega}_p \not\equiv 0$; comme a et u sont supposées être des unités c'est absurde.

2ème cas: $\nu(\lambda(t)) < p$. On trouve cette fois $u(t), v(u) \geq 1$ tel que $d(u(t)\omega - \bar{\omega}_p)$ s'annule sur l'axe des t, lieu singulier de F_p. On en déduit l'existence de a et α tels que:

$$u(t).\omega - \bar{\omega}_p = a.dF_p + F_p\alpha$$

Faisant $t = 0$, on constate que $\bar{\omega}_{p|\mathbb{C}^2\times\{o\}}$ se laisse diviser relativement par y^2+x^3; or

$$\bar{\omega}_{p|\mathbb{C}^2\times\{o\}} = x(3ydx - 2xdy)$$

ne se laisse pas diviser relativement. C'est donc encore absurde et finalement le cas (iii) ne peut se présenter. Le théorème 9 est ainsi démontré.

4. Remarque sur le calcul de Suwa. Dans [S] T. Suwa introduit les objets suivants pour un feuilletage singulier $\mathcal{F}_\omega$ défini par la forme ω intégrable holomorphe à l'origine de $\mathbb{C}^n$:

$$I(\omega) = \{H \in \mathcal{O}_n / \exists\eta \in \Lambda^1(\mathbb{C}^n, o) \quad \text{tel que} H d\omega = \omega \wedge \eta\}$$

$$J(\omega) = \{H \in \mathcal{O}_n / H = i_X\omega, X \text{ champ holomorphe à l'origine de} \mathbb{C}^n\}$$

$$K(\omega) = \{H \in \mathcal{O}_n / H d\omega = dH \wedge \omega\}$$

Les idéaux $I(\omega)$ et $J(\omega)$ ne dépendent pas du choix de ω définissant $\mathcal{F}_\omega$; par contre $K(\omega)$, espace vectoriel des facteurs intégrants, dépend lui du choix de ω. Toutefois la condition $K(\omega) = \{o\}$ est indépendante de ce choix. Un cas particulier des résultats de Suwa s'énonce comme suit:

Théorème 10. *Supposons que* $K(\omega) = 0$ *et que* $\dim_{\mathbb{C}} I(\omega)/J(\omega) = p < \infty$*; s'il existe un déploiement (intégrable)* Ω *de* ω *sur* $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^p$ *(muni des coordonnées* (x,t)*) tel que:*

$$\Omega = \omega + \Sigma H_i.dt_i \pmod{t_1, \ldots, t_p}$$

où les $H_i \in I(\omega)$ *sont tels que leurs projections dans* $I(\omega)/J(\omega)$ *forment une base, alors le déploiement* Ω *est versel.*

Remarque. En pratique il est très difficile de savoir, pour ω donné, s'il existe ou non Ω satisfaisant les hypothèses du théorème 10.

Lemme. *Soit* $\omega_o \in \Sigma^{100}$ *d'écriture normalisée* $\Omega_h = d(y^2 + x^3) + h(2xdy - 3ydx)$ *alors:*

1) $K(\omega_o) = 0$

2) $J(\Omega_h) = (y, x^2) = J(y^2 + x^3)$

3) $\dim_{\mathbb{C}} I(\omega_o)/J(\omega_o) = 1$

Preuve. 1) Supposons qu'il existe un facteur intégrant f de $\Omega_h, f \equiv 0$; comme Ω_h n'a pas d'intégrale première holomorphe, $f \in \mathcal{M}$ et la courbe $(f = 0)$ est une séparatrice de Ω_h. Les séparatrices de Ω_h se réduisant à $(y^2 + x^3 = 0)$ il existe une unité $U \in \mathcal{O}_2$ telle que:

$$f = U.(y^2 + x^3)^m, \quad m \in \mathbb{N}$$

Dire que f est facteur intégrant de Ω_h implique que:

$$d\Omega_h = \left(m.\frac{d(y^2 + x^3)}{y^2 + x^3} + \frac{dU}{U} \right) \wedge \Omega_h$$

ce qui, par un calcul déjà rencontré, conduit à $h \in (y, x^2)$ - contradiction.

2) On a $J(\Omega_h) = (3x^2 - 3yh, 2y + 2xh)$; comme $h \in \mathcal{M}$ on a l'inclusion $J(\Omega_h) \subset (y, x^2)$. Cette inclusion est une inégalité.

3) Visiblement

$$I(\Omega_h) = \left\{ H/H \left(2x\frac{\partial h}{\partial x} + 3y\frac{\partial h}{\partial y} + 5h \right) \in (y, x^2) \right\}.$$

Ecrivant comme précédemment $j^1 h = \alpha.x + \beta.y, \alpha \neq 0$, on a:

$$I(\Omega_h) = \{H/H.x \in (y, x^2)\}$$

Par conséquent si $H \in \mathcal{O}_2$ est tel que $j^1 H = \epsilon.x + \delta y, \epsilon \neq 0$, alors $I(\Omega_h) = J(\Omega_h) + \mathbb{C}.H$. $\square$

Supposons maintenant qu'il existe, comme dans l'énoncé de Suwa, Ω déploiement de $\omega_o = \Omega_h \in \Sigma^{100}$

$$\Omega = \omega_o + H\,dt \operatorname{mod}(t), \quad H \in I(\omega_o)$$

avec $j^1 H = \epsilon x + \delta y, \epsilon \neq 0$. Le 1-jet de Ω s'écrit:

$$j^1\Omega = 2ydy + t\omega_1 + (\epsilon x + \delta y)dt$$

où ω_1 est une certaine 1-forme constante à deux variables; ainsi $\omega_1 = dL$ où L est une forme linéaire. On a:

$$d\Omega(o) = d(j^1\Omega) = d(\epsilon x + \delta y - L) \wedge dt = d(a.x + b.y) \wedge dt$$

Montrons que nécessairement $d\Omega(o) = 0$; en effet si $d\Omega(o) \neq 0, \Omega$ est un phénomène de Kupka-Reeb. Il est bien connu [C,M] que Ω possède alors un facteur intégrant formel F non trivial; $f(x,y) = F(x,y,o)$ ne peut être identiquement nul sinon $t = 0$ serait séparatrice de Ω, ce qui n'est pas le cas. Par conséquent f est un facteur intégrant formel non trivial de ω_o; mais ω_o n'en possède pas (même preuve que 1) du lemme).

Par conséquent $d\Omega(o) = 0$ et:

$$j^1\Omega = d(y^2 + t(\epsilon x + \delta y))$$

Puisque $\epsilon \neq 0$ la forme quadratique $y^2 + t(\epsilon x + \delta y)$ est de rang 3 et la forme Ω est à singularité isolée en $0 \in \mathbb{C}^3$; par suite Ω possède une intégrale première holomorphe non constante F; sa restriction f a $(t = 0)$ (qui ne peut être constante, car $t = 0$ serait encore séparatrice de Ω) est alors intégrale première de ω_o, qui n'en possède pas! En conclusion pour $\omega_o \in \Sigma^{100}$ il n'existe pas de forme Ω satisfaisant à l'énoncé th. 10; on en déduit l'alternative suivante pour $\omega_o \in \Sigma^{100}$:

- ou bien tout déploiement de ω_o est trivial (nous le savons pour les déploiements *non dicritiques*)
- ou bien l'espace des paramètres du déploiement versel de Girbau-Mattei est *non lisse*

C'est la première alternative qui semble la plus raisonnable et nous formulons la:

Conjecture. *La propriété suivante est générique pour les éléments $\omega_o \in \Lambda^1(\mathbb{C}^2, o)$: "tout déploiement à un paramètre ω de ω_o est équisingulier". Ceci signifie que $S(\omega)$ est une courbe lisse, que l'on peut supposer être l'axe des t et que*

$$\mu(\omega_t) = \mu(\omega_o), \quad \textit{où} \quad \omega_t = \omega_{|\mathbb{C}^2 \times \{t\}}.$$

Index des notations.

$\mathcal{O}(U)$ = anneau des fonctions holomorphes sur l'ouvert U.

$\Lambda^p(U) = \mathcal{O}(U)$ module des p-formes différentielles holomorphes sur U.

$\mathcal{O}(\mathbb{C}^n, m)$ = anneau des germes de fonctions holomorphes au point $m \in \mathbb{C}^n$.

$\Lambda^p(\mathbb{C}^n, m) = \mathcal{O}(\mathbb{C}^n, m)$ module des germes de p-formes différentielles holomorphes au point $m \in \mathbb{C}^n$.

$\mathcal{O}_n = \mathcal{O}(\mathbb{C}^n, o)$.

$\mathcal{M}_n$ = idéal maximal de $\mathcal{O}_n$.

Références

[C,L,S]: C. Camacho, A. Lins Neto, P. Sad. *Topological invariants and equidesingularization for holomorphic vector fields.* J. of Diff. Geometry. **20 1** 143–174 (1984).

[C,C]: F. Cano, D. Cerveau. *Desingularization of non dicrital holomorphic foliations and existence of separatrices.* To appear in Acta. Math.

[C]: H. Cartan. *Sur le premier problème de Cousin.* C. R. Acad. Sc. **207**, 558–560 (1938).

[Ce]: D. Cerveau. *Cohomologie relative des formes fermées méromorphes.* C. R. Acad. Sc. t. 303, série 1, no. 14, 1986, 685–688.

[C.L.]: D. Cerveau, A. Lins Neto. *Holomorphic foliations in* $\mathbb{C}P(2)$ *having an invariant algebraic curve.* Preprint I.M.P.A.

[C,M]: D. Cerveau, J.F. Mattei. *Formes intégrables holomorphes singulières.* Astérisque. **97** (1983).

[C,Mo]: D. Cerveau, R. Moussu. *Groupes d'automorphismes de* $\mathbb{C}, o$ *et équations différentielles* $ydy + \cdots = 0$. Bull. Soc. Math. France. **116**, 1988, p. 459–488.

[Mal]: B. Malgrange. *Frobenius avec singularités I: codimension un.* Pub. Math. I.H.E.S., Vol. **48**, 1976, 163–173.

[Mat]: J.F. Mattei. *Modules de feuilletages holomorphes singuliers: déploiements équisinguliers.* Preprint.

[M,M]: J.F. Mattei, R. Moussu. *Holonomie et intégrales premières.* Ann. Sc. Ec. Norm. Sup. 4ème série, t. 13, 1980, 469–523.

[Mo]: R. Moussu. *Holonomie évanescente des équations différentielles dégénérées transverses.* In "singularities and dynamical systems". North Holland 1985, pp. 151–173.

[S]: T. Suwa. *A theorem of versality for unfolding of complex analytic foliations singularities.* Invent. Math. **65** (1981), 29–48.

Dominique Cerveau
I.R.M.A.R.
Université de Rennes I
Campus de Beaulieu
35 042 – Rennes Cedex